$f: U \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0$ σ.σ του U

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall\, (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\},\ \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \text{ με } f(\bar{x}_\nu) \to \ell.$$

$$\iff f(\bar{x}_\nu) - \ell \to 0.$$

Άσκηση

Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια.

(α) $$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Δεν συγκλίνει αφού για $\left(\frac{1}{\nu}, 0, 0\right)$ το όριο της $f\left(\frac{1}{\nu}, 0, 0\right)$ είναι 1, ενώ για $\left(0, \frac{1}{\nu}, 0\right)$ είναι $f\left(0, \frac{1}{\nu}, 0\right) \to -1$

(β) $$\lim_{(x,y) \to (1,1)} \frac{x^2 + y^2 - 2}{|x-1| + |y-1|} = \lim_{(x-1,y-1) \to (0,0)} \frac{(x-1+1)^2 + (y-1+1)^2 - 2}{|x-1| + |y-1|}$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x+1)^2 + (y+1)^2 - 2}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x^2+y^2) + 2xy}{|x| + |y|}$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} + 2 \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x+y}{|x|+|y|} \quad (1)$$, με

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{|x|+|y|}$ να μην υπάρχει γιατί για

$\left(-\frac{1}{\nu},0\right)$ έχουμε $f\left(-\frac{1}{\nu},0\right)\to -1$ ενώ για

$\left(\frac{1}{\nu},0\right)$ έχουμε $f\left(\frac{1}{\nu},0\right)\to 1.$ (2)

Έστω τώρα ότι $(x_\nu,y_\nu)\to(0,0)$.
θ.δ.ο:

$$0\leq \frac{x_\nu^2+y_\nu^2}{|x_\nu|+|y_\nu|}\to 0.$$

$$\frac{x_\nu^2+y_\nu^2}{|x_\nu|+|y_\nu|}\leq \frac{|x_\nu|^2+|y_\nu|^2+2|x_\nu||y_\nu|}{|x_\nu|+|y_\nu|}=|x_\nu|+|y_\nu|\to 0. \quad (3)$$

Άρα από (1), (2), (3) το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει

(Αν το άθροισμα (1) υπήρχε, θα υπήρχαν και τα επιμέρους)
(2), (3)

(γ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \overset{?}{=} 0$

Αφού $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow \forall\ (x_\nu, y_\nu) \to (0,0)\ , \begin{cases} f(x_\nu, y_\nu) \to 0 \\ |f(x_\nu, y_\nu)| \to 0 \end{cases}$

$0 \leq \left| \dfrac{x_\nu y_\nu (x_\nu^2 - y_\nu^2)}{x_\nu^2 + y_\nu^2} \right| = \dfrac{|x_\nu||y_\nu||x_\nu^2 - y_\nu^2|}{x_\nu^2 + y_\nu^2}$

$\leq \dfrac{|x_\nu||y_\nu|(|x_\nu^2| + |y_\nu^2|)}{x_\nu^2 + y_\nu^2} = |x_\nu||y_\nu| \longrightarrow 0$

Άλγεβρα ορίων: $f, g : U \to \mathbb{R},\ U \subset \mathbb{R}^n,\ \bar{x}_0$ σ.σ του U

και $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell\ ,\ \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g(\bar{x}) = m$. Τότε ισχύουν

(α) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (f(\bar{x}) \pm g(\bar{x})) = \ell \pm m$

(β) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\alpha f)(\bar{x}) = \alpha \ell$, (γ) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (fg)(\bar{x}) = \ell \cdot m$.

(δ) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{\ell}{m}$ (αν $m\neq 0$)

(ε) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (h\circ f)(\bar{x}) = h(\ell)$, με h συνεχή στο ℓ.

Απόδειξη (ε).

h συνεχής στο $\ell \iff \forall\, y_\nu \to \ell \;\; h(y_\nu)\to h(\ell)$

Θ.ν.δ.ο: $\underbrace{(h\circ f)}(\bar{x}_\nu) \to h(\ell)$

$= h(f(\bar{x}_\nu))$.

Οπότε για $y_\nu = f(\bar{x}_\nu)$ έχω το αποτέλεσμα.

$f(x,y) = x$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Βρείτε το $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

Λύση: Έστω $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$.

$\underbrace{f(x_\nu,y_\nu)}_{x_\nu} = x_\nu \to x_0 = f(x_0,y_0)$.

(Έτσι όλες οι ρητές συναρτήσεις έχουν όριο στο $\bar{x}_0$ την τιμή τους στο $\bar{x}_0$. Άρα είναι ως συναρτήσεις συνεχείς)

Άσκηση

Βρείτε το όριο: $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \dfrac{\sin(\|\bar{x}\|^2)}{(\|\bar{x}\|^2)}$, όπου $\bar{x}, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Καταρχήν: $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Η $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\| = \sqrt{g_1^2(x) + \dots + g_n^2(x)}$, όπου $g_i(\bar{x}) = x_i$, $\forall i = 1, \dots, n$

για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g_i(\bar{x}) = x_0^{(i)}$

$$\xrightarrow[(\gamma)]{\text{Πρόταση}} \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g_i^2(\bar{x}) = (x_0^{(i)})^2, \ \forall i = 1, \dots, n$$

$$\xrightarrow[(\alpha)]{\text{Πρόταση}} \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \sum_{i=1}^{n} g_i^2(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_0^{(i)})^2 \xrightarrow[(\varepsilon)]{\text{Πρόταση}}$$

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i^2(\bar{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_0^{(i)})^2}$$

Οπότε $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \|\bar{x}\| = \|\bar{x}_0\|$. Ακόμη: $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \|\bar{x}\|^2 = \|\bar{x}_0\|^2$

Μέχρι τώρα δείξαμε $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \|\bar{x}\| = \|\bar{x}_0\|$

Όμως η συνάρτηση $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής αν θέσουμε $g(0) := 1$

$$\overset{\text{πρόταση}}{\underset{(\varepsilon)}{\Longrightarrow}} \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{\sin \|\bar{x}\|^2}{\|\bar{x}\|^2} = g(\|\bar{x}_0\|^2), \text{ ειδικότερα}$$

για $\|\bar{x}_0\| = 0$, έχουμε $\lim_{\bar{x} \to \bar{0}} \frac{\sin \|\bar{x}\|^2}{\|\bar{x}\|^2} = 1 := g(0)$

Συνέχεια πραγμ. συναρτήσεων.

Ορισμός: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται

(α) συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U \iff \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$

$\iff \forall (\bar{x}_\nu) \subset U,\ \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 : f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$

(β) συνεχής στο $A \subset U \iff$ Η f από το $U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in A$.

(γ) συνεχής $\iff$ Η f είναι συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in U$

Παράδειγμα / Παρατήρηση

Έστω $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1$

Δ.ο: f συνεχής.

Λύση
Θ.ν.δ.ο $\forall\ (x_\nu, y_\nu) \subset [0, \infty) \times [0, \infty)$ με $(x_\nu, y_\nu) \rightarrow (x_0, y_0)$

$\underbrace{f(x_\nu, y_\nu)}_{=1} \rightarrow \underbrace{f(x_0, y_0)}_{1}$, που ισχύει.

Έστω τώρα $g(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \overbrace{[0,\infty) \times [0,\infty)}^{M} \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$

Εξετάσατε σε ποια σημεία $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής η g.

[Αυτήν την έχουμε εξετάσει ήδη!] Είδαμε ότι αν $(x_0, y_0) \in \text{int}\,M$

ή αν $(x_0, y_0) \in \text{ext}\,M$, η $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει πάντα όριο

$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} g(x,y) = g(x_0, y_0)$.

Ενώ για $(x_0, y_0) \in \partial M$ (σύνορο M), το όριο δεν υπάρχει

(συνεπώς η g σε αυτά τα σημεία, δεν είναι συνεχής).

Άρα, το αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο της, εξαρτάται από το πεδίο ορισμού της.

(Π.χ η g δεν είναι συνεχής, ενώ η $g|_{[0,\infty)\times[0,\infty)}$ είναι.)

Βασικές συνεχείς πραγμ. συναρτήσεις. (όπως είδαμε).

• $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $\forall i = 1, \dots, n$

• $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$

Από την πρόταση (άλγεβρα ορίων) προκύπτει άμεσα ότι:

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f, g: U \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $\bar{x}_0$

Τότε είναι συνεχής στο $\bar{x}_0$: $\begin{cases} f+g \\ af \\ f\cdot g,\ f/g \ (\text{αν } g(\bar{x}_0) \neq 0) \end{cases}$

, καθώς και η $g\circ f$

Ειδικότερα και οι $|f|$, $\sqrt{f}$, $\sqrt{|f|}$, κλπ.

Άσκηση Γιαννούλη (10/11/15)

Αν $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x}))$ και

$\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$, τότε ισχύει η εξής ισοδυναμία

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \ell \iff \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f_i(\bar{x}) = \ell_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

(ανάγει ύπαρξη/μελέτη ορίου $\bar{f}$ σε ύπαρξη/μελέτη των ορίων των συνιστωσών της, πραγματικές)

Απόδειξη

Έστω $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \ell$. Τότε με χρήση του ε-δ ορισμού

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_{(\varepsilon,\bar{x}_0)} > 0 : \forall \bar{x} \ A_{\bar{f}} : 0 < \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \delta$

$\Rightarrow \|\bar{f}(\bar{x}) - \ell\| < \varepsilon$, δηλαδή έχω ότι

$$0 < \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \delta \Rightarrow \sqrt{|f_1(\bar{x}) - \ell_1|^2 + \ldots + |f_n(\bar{x}) - \ell_n|^2} < \varepsilon$$

Εφόσον: $|f_i(\bar{x}) - \ell_i| \le \sqrt{|f_1(\bar{x}) - \ell_1|^2 + \ldots + |f_n(\bar{x}) - \ell_n|^2} < \varepsilon$

, έχω ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, \bar{x}_0) > 0 : \forall \bar{x} : 0 < \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \delta$

$\Rightarrow |f_i(\bar{x}) - \ell_i| < \varepsilon$, συνεπώς $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f_i(\bar{x}) = \ell_i, \ i = 1, \ldots, n$

Αντίστροφα, αν $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f_i(\bar{x}) = l_i$, $i=1,\dots,n$, τότε

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_i > 0 : \forall \bar{x} \in A_{\bar{f}} : 0 < \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \delta_i$$
$$\Rightarrow |f_i(\bar{x}) - l_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Επιλέγω $\delta = \min\{\delta_i, i=1,\dots,n\}$. Τότε

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \bar{x} : 0 < \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{l}\|$$
$$= \sqrt{|f_1(\bar{x})-l_1|^2 + \dots + |f_n(\bar{x})-l_n|^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}\cdot n} = \varepsilon,$$ συνεπώς $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{l}$.

Άμεσα από την παραπάνω άσκηση έχω ότι

$\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}_0$ $\Leftrightarrow$ οι f_i συνιστώσες της διανυσματικής συνάρτησης είναι συνεχείς (πραγμ. μεταβ. συναρτήσεις) στο $\bar{x}_0$.